12. Se quiere apuntalar la pared de un edificio por medio de una viga apoyada sobre una pared paralela, de 10 m de altura, situada a una distancia de 8 m de la primera. Hallar la longitud L de la viga más corta que se puede emplear al efecto.

Sea x la distancia del pie de la viga al de la pared paralela, e y la distancia metros del suelo al extremo superior. de la viga. (Ver Fig. 9-7.)

$L = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}$. De los triángulos semejantes, $\dfrac{y}{10} = \dfrac{x+8}{x}$ e $y = \dfrac{10(x+8)}{x}$.

Por tanto $L = \sqrt{(x+8)^2 + \dfrac{100(x+8)^2}{x^2}} = \dfrac{x+8}{x}\sqrt{x^2+100}$ y

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x[(x^2+100)^{1/2} + x(x+8)(x^2+100)^{-1/2}] - (x+8)(x^2+100)^{1/2}}{x^2} = \frac{x^3 - 800}{x^2\sqrt{x^2+100}}$$

El valor crítico es $x = 2\sqrt[3]{100}$. La longitud de la viga más corta es

$$\frac{2\sqrt[3]{100}+8}{2\sqrt[3]{100}}\sqrt{4\sqrt[3]{10\,000} + 100} = (\sqrt[3]{100} + 4)^{3/2} \text{ m}$$

Problemas propuestos

13. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y (*a*) su producto sea máximo, (*b*) la suma de sus cuadrados sea mínima, (*c*) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. *Sol.* (*a*) 10,10; (*b*) 10,10; (*c*) 8,12.

14. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 16 y (*a*) su suma sea mínima. (*b*) la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima. *Sol.* (*a*) 4,4; (*b*) 8,2.

15. Hallar las dimensiones de una caja rectangular abierta de 6 400 centímetros cúbicos para que resulte la más económica, teniendo en cuenta que el precio de coste de la base es de 75 pesetas y el de las superficies laterales de 25 pesetas por centímetro cuadrado.
Sol. $20 \times 22 \times 16$ cm.

16. Una pared de 3,2 metros de altura está situada a una distancia de 1,35 metros de una casa. Hallar la longitud de la escalera más corta de manera que, apoyándose en el suelo y en la pared, llegue a la cima de la casa. *Sol.* 6,25 metros.

17. Una entidad bancaria tiene las siguientes tarifas: 30 pesetas por cada mil para operaciones de hasta 50 000 pesetas; para la cantidad que sobrepase esta cifra, disminuye la tasa anterior en 0,375 pesetas por cada mil. Hallar la operación óptima de manera que el beneficio del banco sea máximo. *Sol.* 90 000 pesetas.

18. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por el punto (3, 4), determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados, un triángulo de área mínima. *Sol.* $4x + 3y - 24 = 0$.

19. Hallar un punto de la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la tangente determine en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. *Sol.* $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$.

20. Hallar la mínima distancia del punto (4, 2) a la parábola $y^2 = 8x$. *Sol.* $2\sqrt{2}$ unidades.

21. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento de ella interceptado por los ejes coordenados sea mínimo. Demostrar que la longitud de este segmento es de 9 unidades.

22. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo para que (*a*) el área sea máxima, (*b*) el perímetro sea máximo. *Sol.* (*a*) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$, (*b*) 32×18.

23. Hallar el radio R del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r.
Sol. $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$.

24. En un cono circular recto r, se inscribe un cilindro circular recto. Hallar el radio R del cilindro para que (*a*) su volumen sea máximo (*b*) su área lateral sea máxima. *Sol.* (*a*) $R = \frac{2}{3}r$, (*b*) $R = \frac{1}{2}r$.

25. Demostrar que la menor cantidad de lona empleada en confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado ocurre cuando su altura sea dos veces el radio de la base.

26. Demostrar que todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de lado $3r$.

27. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima que se puede inscribir en una esfera de 8 centímetros de radio. *Sol.* $h = 2r = 8\sqrt{2}$ centímetros.

28. Estudiar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima en un cono circular recto de radio r y altura h. *Sol.* Si $h > 2r$, radio del cilindro $= \frac{1}{2}hr/(h - r)$.